به نام خدا

جلسه چهارم: آونگ ساده و مرکب

مدرس: دکتر احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: *@FathiTrainingGroup*

Website: *FathiTrainingGroup.com*

Email: *ehsanfathi_eh@yahoo.com*

Tel: *09386249330, 05191012910*

فهرست مطالب

- هدف آزمایش
- تئوری آزمایش
- وسایل انجام آزمایش
- دستگاه آزمایش
- محاسبه مقادیر تئوری
- محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی
- روش انجام آزمایش
- خواسته‌های آزمایش

هدف آزمایش

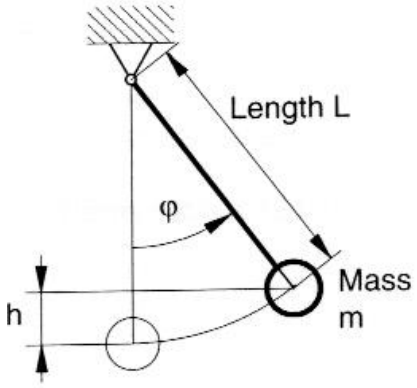
- محاسبه و بررسی عوامل موثر بر دوره تناوب حرکت آونگ‌ها

تئوری آزمایش

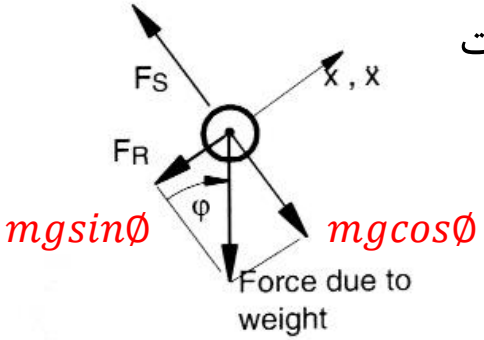
آونگ ریاضی یا ساده (Mathematical Pendulum)

ساده ترین مدل آونگ، آونگ ریاضی می‌باشد، که شامل یک جرم متمرکز آویزان از یک نخ بدون وزن است. آونگ در یک صفحه در میدان جاذبه زمین نوسان می‌کند. معادله دیفرانسیلی حاکم (معادله حرکت) که حرکت آونگ را توصیف می‌کند از نمودار مقابل به دست می‌آید.

آونگ به اندازه زاویه φ منحرف می‌گردد. بنابراین، مرکز جرم متمرکز به اندازه h بالا برده می‌شود. اگر آونگ رها گردد نیروی باز گرداننده F_R به عنوان مولفه‌ای از نیروی وزن تلاش می‌کند که آونگ را به موقعیت اولیه‌اش برگرداند.



Mathematical pendulum in deflected position



Forces at concentrated mass

تئوری آزمایش

با نوشتن معادله حرکت در جهت x با شتاب مرکز جرم $\ddot{x}$ و نیروی بازگرداننده $F_R = mg\sin\varphi$ داریم:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\varphi$$

شتاب زاویه‌ای را می‌توان با $\ddot{x}$ مرتبط گردانید، از آنجایی که جرم یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند لذا:

$$x = L\varphi \qquad \ddot{x} = L\ddot{\varphi}$$

در نتیجه معادله حرکت تبدیل خواهد شد به:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$$

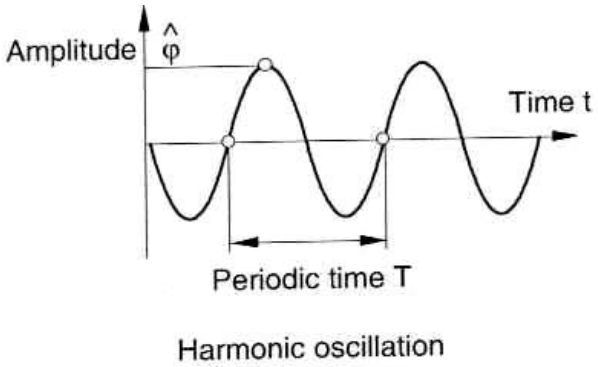
این یک معادله دیفرانسیل غیر خطی است که با فرض انحراف کوچک φ یعنی:

$$\sin\varphi = \varphi \qquad \varphi << \pi$$

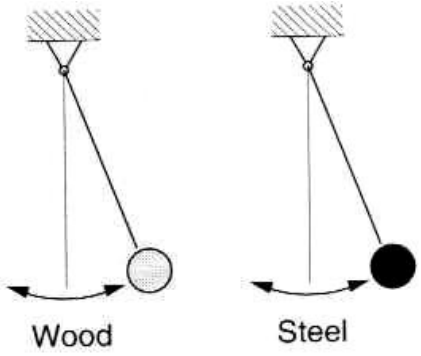
می‌توان آن را خطی کرد. در نتیجه معادله حرکت برای آونگ ریاضی عبارت خواهد بود از:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$$

تئوری آزمایش



Harmonic oscillation



Mass / material has no effect on period of oscillation

جواب معادله یک نوسان هارمونیک می‌باشد که به صورت:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \hat{\varphi}\sin\omega t$$

بیان می‌گردد که ω فرکانس نوسان می‌باشد. با دو بار دیفرانسیل گیری و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

و زمان تناوب:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

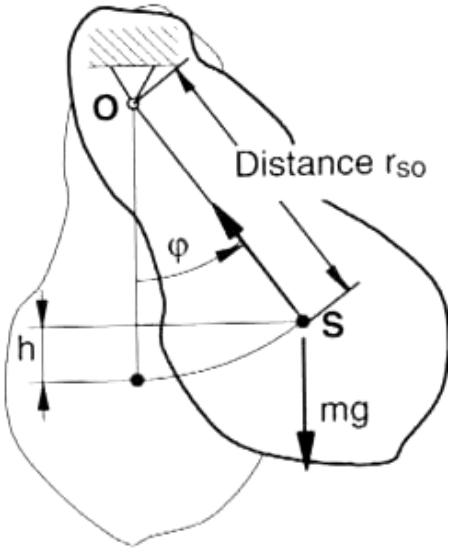
تئوری آزمایش

این فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان آونگ می‌باشد. عوامل حاکم بر این کمیات طول آونگ L و ثابت گرانش g می‌باشد. جرم آونگ و ماده‌ای که آونگ از آن ساخته شده است تاثیری بر فرکانس طبیعی نوسان سیستم ندارد.

تئوری آزمایش

- **آونگ فیزیکی (Physical Pendulum)**

آونگ فیزیکی آونگی است که جرم آونگ در یک نقطه متمرکز نمی‌باشد در حقیقت همه آونگ‌ها فیزیکی می‌باشد چون غیر ممکن است به صورت ایده ال جرم را در یک نقطه متمرکز نمود. برای به دست آوردن معادله حرکت لازم است که گشتاور حول نقطه آویز (تکیه‌گاه) را معادل تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای حول آن نقطه یا $\dot{H}_0$ قرار داد.



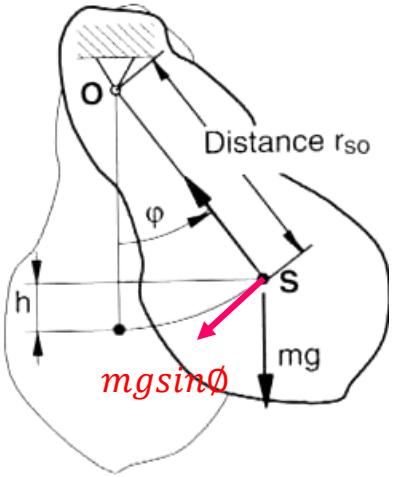
از آنجایی که:

$$H_O = J_O\omega = J_O\dot{\varphi}$$

در نتیجه:

$$\sum M_O = J_O\ddot{\varphi}$$

تئوری آزمایش



از آنجایکه:

$$\sum M_O = -mgr_{so}\sin\varphi$$

می‌باشد خواهیم داشت:

$$J_0\ddot{\varphi} = -mgr_{so}\sin\varphi$$

با جایگزینی و خطی کردن این معادله، معادله حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_{so}}{J_O}\varphi = 0$$

تئوری آزمایش

محاسبه فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان همانند آونگ ریاضی می‌باشد.

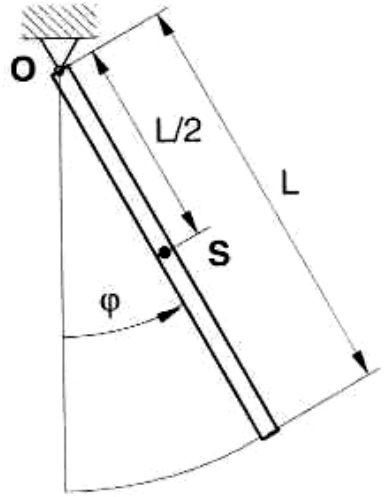
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_{so}}{J_O}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgr_{so}}{J_O}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgr_{so}}}$$

ممان اینرسی J_O حول نقطه آویز O از ممان اینرسی حول مرکز جرم J_S و استفاده از انتقال محورهای موازی بدست می‌آید:

$$J_O = J_S + mr_{SO}^2$$

تئوری آزمایش



برای یک میله نازک داریم:

$$J_S = \frac{1}{12} mL^2$$

$$J_O = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$$

$$J_O = \frac{mL^2}{3}$$

از طرفی معادله حرکت یک میله باریک به صورت زیر می‌باشد:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2L}\varphi = 0$$

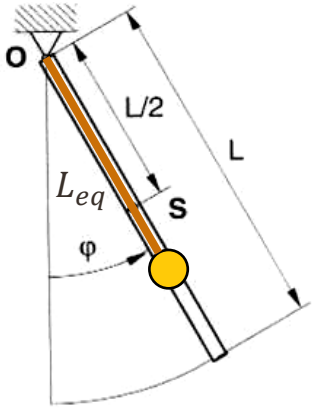
در نتیجه فرکانس طبیعی و زمان تناوب نوسان برای یک میله عبارت است از:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$$

تئوری آزمایش

- **طول معادل و مرکز ضربه:**



طول معادل L_{eq} یک آونگ فیزیکی عبارت است از طول یک آونگ ریاضی که زمان تناوب آن معادل آونگ فیزیکی باشد. یعنی:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgr_{so}}}$$

در نتیجه طول معادل به صورت زیر خواهد بود:

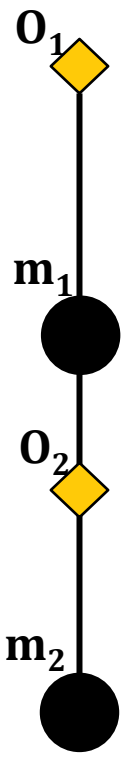
$$L_{eq} = \frac{J_0}{mr_{so}}$$

برای آونگ میله‌ای داریم:

$$J_0 = mL^2/3 \qquad r_{so} = \frac{L}{2}, \qquad L_{eq} = \frac{mL^2/3}{mL/2} = \frac{2}{3}L$$

تئوری آزمایش

- **آونگ معکوس (Reversible Pendulum)**

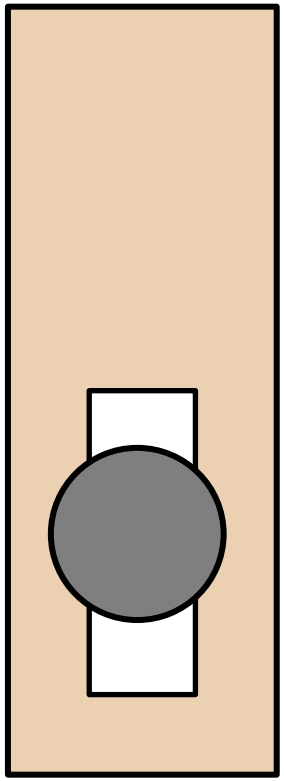


این نوع آونگ دارای دو نقطه آویزان (تکیه‌گاه) می‌باشد. ویژگی خاص چنین آونگی این است که چنانچه از هر یک از این نقاط آویزان گردد زمان تناوب آن فرقی نخواهد کرد. فاصله بین دو نقطه برابر طول معادل آونگ می‌باشد. این اثر مشابه سازی ایده ال یک آونگ ریاضی می‌باشد. در آونگ ریاضی فاصله بین تکیه‌گاه و مرکز جرم برابر طول معادل آونگ می‌باشد.

زمان تناوب فقط تابعی از طول معادل و شتاب جاذبه می‌باشد. از آنجایکه بدست آوردن طول معادل یک آونگ نسبتا پیچیده می‌باشد از روش تجربی استفاده شده است. فاصله x بین دو تکیه‌گاه طوری تنظیم می‌شود که زمان تناوب T برای هر دو تکیه‌گاه یکسان گردد. در نتیجه فاصله x دقیقاً برابر طول معادل آونگ L_{eq} می‌باشد.

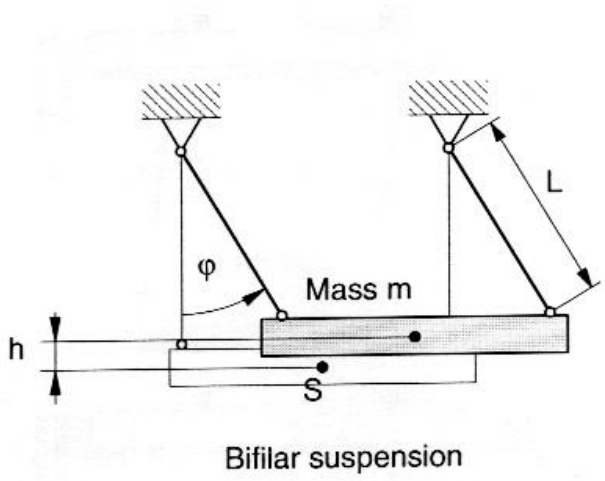
تئوری آزمایش

- **آونگ صلب چوبی**



آونگ صلب چوبی به عنوان مثالی از یک آونگ غیر همگن با هندسه‌ای پیچیده استفاده می‌شود. زمان تناوب نوسان را می‌توان بوسیله اتصال یک جرم فولادی اضافه تنظیم نمود.

تئوری آزمایش



Bifilar suspension

- **آونگ با دو نخ آویز**

یک آونگ دو نخه (یعنی آونگی که از دو نخ آویزان شده باشد) از نظر معادله حرکت متناظر با آونگ ایده آل ریاضی می‌باشد.

از آنجایکه در این آزمایش جرم دارای یک حرکت انتقالی منحنی الخط دورانی می‌باشد که متناظر با جرم متمرکز آونگ ریاضی است. زمان تناوب نوسان فقط تابعی از طول نخ‌های آویز و شتاب جاذبه می‌باشد، یعنی:

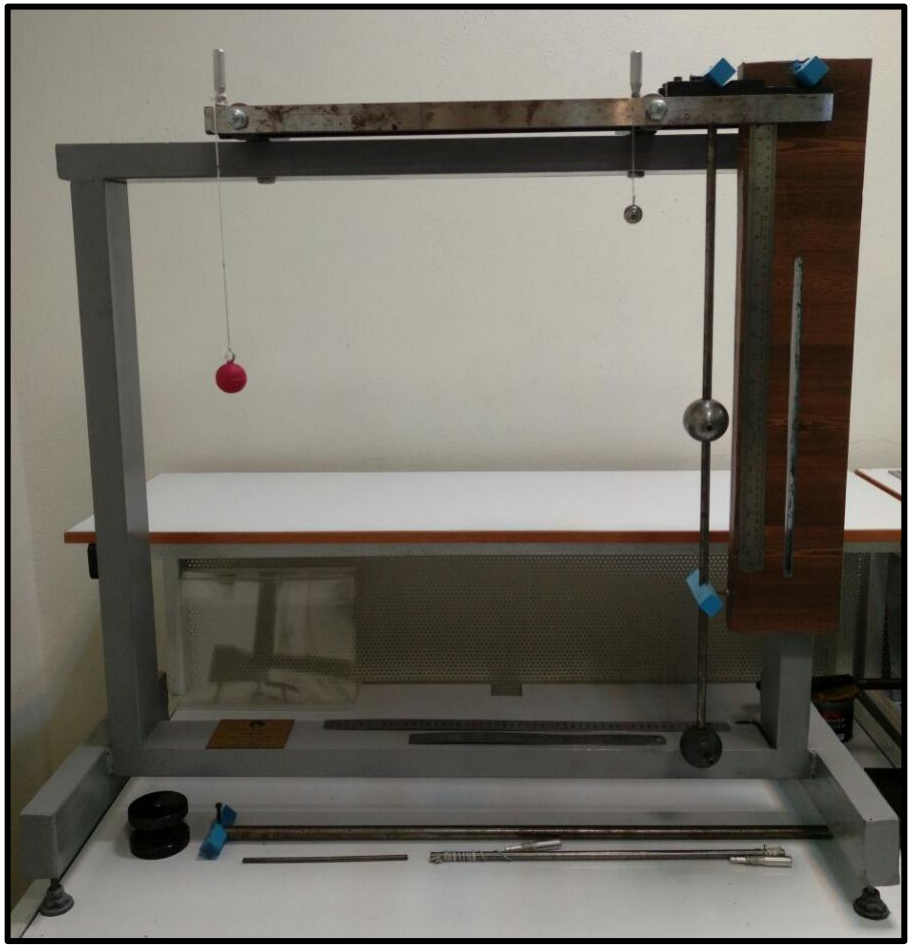
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

اندازه و شکل جرم آونگ تاثیری بر زمان تناوب ندارد .

وسایل انجام آزمایش

- پایه
- جرم متمرکز
- جرم نامتقارن چوبی
- میله
- کورنومتر جهت اندازه‌گیری دوره تناوب آونگ
- متر جهت اندازه‌گیری طول آونگ
- آچار جهت سفت کردن اتصالات

دستگاه آزمایش



محاسبه مقادیر تئوری

طبق آن چه در تئوری آزمایش بدست آورده شد، فرمول‌های لازم برای محاسبه مقادیر تئوری هر مرحله عبارتند از:

۱- آونگ ساده:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

۲- آونگ فیزیکی:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_{so}}{J_O}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgr_{so}}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$$

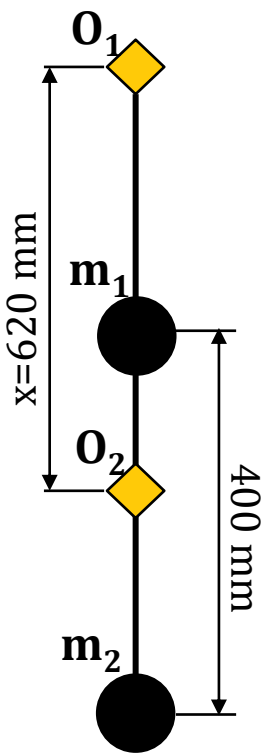
محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی

نحوه محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{درصد خطای آزمایشگاهی} = \frac{\text{مقدار عملی} - \text{مقدار تئوری}}{\text{مقدار تئوری}} \times 100$$

روش انجام آزمایش

۷- آزمایش هفتم: آونگ معکوس شونده



به منظور انجام این آزمایش تکیه‌گاه O_2 آنقدر جابجا می‌شود که هر دو زمان تناوب (چه از O_1 آویزان گردد و چه از O_2) معادل باشد. به همین منظور آونگ میله‌ای به طول ۸۰۰ میلیمتر با دو جرم اضافه m_1 و m_2 به فاصله ۴۰۰ میلیمتر از یکدیگر به اضافه دو تکیه گاه لبه کاردی در نظر گرفته می‌شود. موقعیتها و اندازه‌ها در شکل مقابل ملاحظه می‌گردد.

از فاصله تکیه گاه‌های $x=620\ mm$ شروع می‌کنیم. فاصله را در قدم های ۱۰ میلیمتر افزایش می دهیم و در هر مرحله هر دو زمان تناوب T_1 (زمانی که از تکیه گاه O_1 آویزان است) و T_2 (زمانی که از تکیه گاه O_2 آویزان است) را اندازه می‌گیریم. با تغییر این دو می‌توان زمان تناوب مساوی را بدست آورد و آنگاه x را محاسبه نمود. برای این کار لازم است جدول را تکمیل کرده و نهایتاً x را به دست آورید.

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش هفتم:

مرحله	x (cm)	$t_{1,10}$	$t_{2,10}$	T_1	T_2	$T_2 - T_1$
1	62	16.35	28.95	1.635	2.895	1.26
2	64	16.35	20.75	1.635	2.075	0.44
3	66	16.35	17.35	1.635	1.735	0.10
4	68	16.35	15.55	1.635	1.555	-0.08
5						
6						

روش انجام آزمایش

خواسته های آزمایش:

۱- تکمیل جدول

۲- ترسیم منحنی های دوره تناوب بر حسب فاصله x در نرم افزار اکسل

۳- ترسیم منحنی اختلاف مقادیر دوره تناوب $(T_2 - T_1)$ بر حسب فاصله x در نرم افزار اکسل

۴- بررسی عوامل خطا

روش انجام آزمایش

۸- آزمایش هشتم: بدست آوردن شتاب گرانش

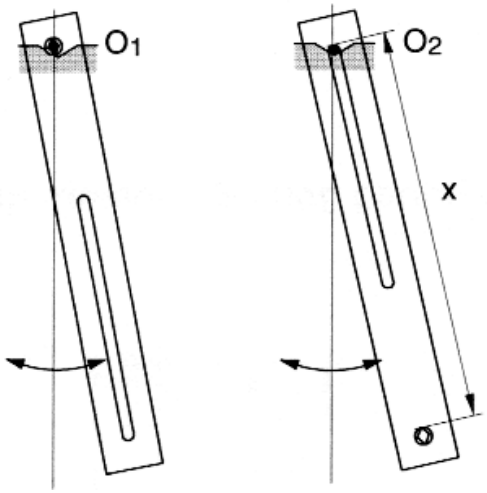
شتاب جاذبه را می‌توان به سادگی از آزمایش قبل محاسبه نمود. می‌دانیم که:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}}$$

میانگین هر دو زمان تناوب T_1 و T_2 را محاسبه نموده و از رابطه بالا می‌توان g را بدست آورد. این مقدار را بدست آورده و با ثابت ارائه شده در متون $g=9.81\ m/s^2$ مقایسه کنید. در رابطه بالا L_{eq} همان x است.

روش انجام آزمایش

۹- آزمایش نهم: بدست آوردن ممان اینرسی جرمی



نحوه بدست آوردن ممان اینرسی یک جسم از طریق نوسان را می توان با این آونگ نشان داد. به این منظور آونگ را از دو نقطه مختلف O_1 و O_2 (برای O_2 یک پین 6 mm را در شکاف قرار می‌دهیم) آویزان نموده و به نوسان وا می داریم. زمان تناوب نوسان مربوطه را به روشهای قبلی اندازه می‌گیریم که به ترتیب T_1 و T_2 برای تکیه‌گاه‌های O_1 و O_2 خواهد بود.

از زمان تناوب‌های بدست آمده می‌توان طول‌های معادل L_{eq1} و L_{eq2} را محاسبه کرد. با توجه به رابطه ممان اینرسی جرمی حول نقطه O_1 و O_2 (J_{o1} و J_{o2}) یعنی:

$$L_{eq} = \frac{J_0}{mr_{so}}$$

روش انجام آزمایش

و همچنین قضیه انتقال محورهای موازی یعنی:

$$J_0 = J_G + mr_{so}^2$$

روابطی را به دست می آوریم و نهایتا می توان J_G را محاسبه کرد لذا لازم است جدول مربوطه تکمیل گردد.

$$J_{o1} - mr_{so1}^2 = J_{o2} - mr_{so2}^2$$

$$J_G = mL_{eq1}r_{so1} - mr_{so1}^2 = mL_{eq2}r_{so2} - mr_{so2}^2$$

$$L_{eq1}r_{so1} - r_{so1}^2 = L_{eq2}(L - r_{so1}) - (L - r_{so1})^2$$

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش نهم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \qquad J_0 = J_G + mr_{so}^2 \qquad L_{eq} = \frac{J_0}{mr_{so}}$$

m	L	$t_{1,10}$	$t_{2,10}$	T_1	T_2	L_{eq1}	L_{eq2}	r_{so1}	J_G	J_{o1}
2.075	0.64	13.15	13.35	1.315	1.335	0.429	0.442	0.310	0.0765	0.2759

$$L_{eq1}r_{so1} - r_{so1}^2 = L_{eq2}(L - r_{so1}) - (L - r_{so1})^2$$

$$0.429r_{so1} - r_{so1}^2 = 0.442(0.64 - r_{so1}) - (0.64 - r_{so1})^2$$

$$0.429r_{so1} = 0.127$$

$$r_{so1} = 0.310$$

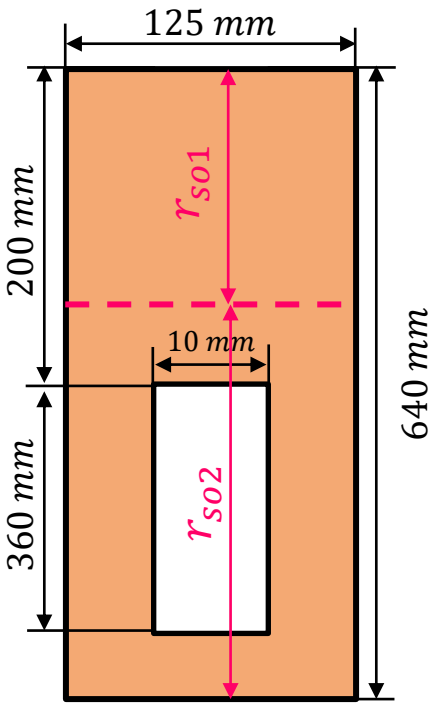
$$J_G = mL_{eq1}r_{so1} - mr_{so1}^2$$

روش انجام آزمایش

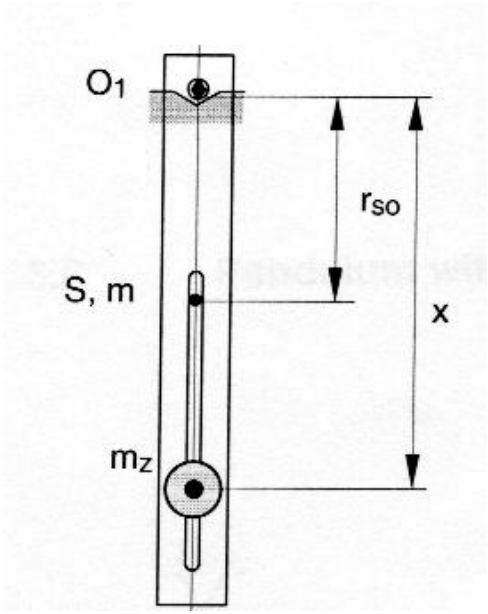
خواسته های آزمایش:

۱- تکمیل جدول

۲- محاسبه مقدار J_g با استفاده از هندسه جرم چوبی (راهنمایی: از کتاب استاتیک مریام کمک بگیرید)



روش انجام آزمایش



۱۰- آزمایش دهم: تنظیم زمان تناوب با یک جرم اضافی

این آزمایش به این منظور طراحی گردیده است تا بتوان زمان تناوب آونگ چوبی را در یک مقدار مشخص مثلاً $t=1.3\ s$ تنظیم نمود. به این دلیل یک وزنه اضافی به جرم m_2 به آونگ اضافه می کنیم و حال باید محل این وزنه را بدست آورد. (یعنی فاصله x)

باید توجه داشت که:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_t}{m_t g r_{SG}}}$$

در نتیجه:

$$J_t = J_0 + m_z x^2$$

$$m_t = m + m_z$$

$$r_{SG} = \frac{m r_{SO} + m_z x}{m + m_z}$$

روش انجام آزمایش

از آنجایکه T، J_O ، m_z، m و r_{SO} معلوم است با قرار دادن این مقادیر می توان x را بدست آورد و با تنظیم آن زمان تناوب را بدست آورد. سپس جدول مربوطه را کامل می‌کنید. چرا یکی از جواب‌ها قابل قبول نمی‌باشد؟

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش دهم:

x	$t_{,10}$	T
30	12.55	1.255
35	12.75	1.275
40	12.95	1.295
45	13.35	1.335
50	13.65	1.365

روش انجام آزمایش

خواسته های آزمایش:

۱- تکمیل جدول

۲- با استفاده از درون یابی خطی مقدار دقیق فاصله جرم متمرکز از مرکز دوران را بدست آورید.

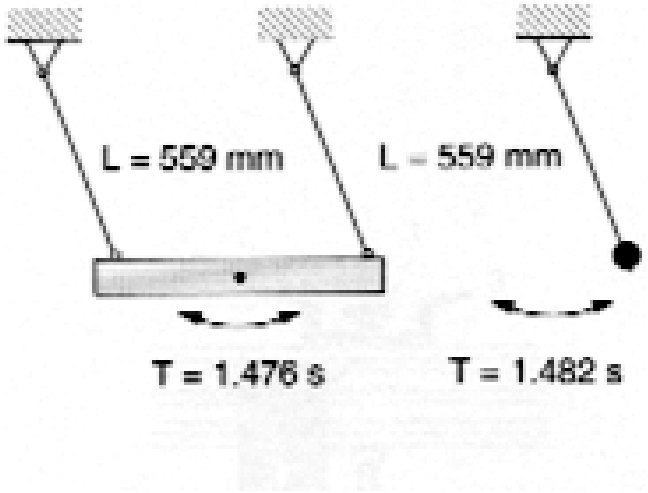
۳- مقدار X بدست آمده از آزمایش را با مقدار تئوری مقایسه کرده و درصد خطا را مشخص کنید.

۴- در خصوص عوامل خطا بحث کنید.

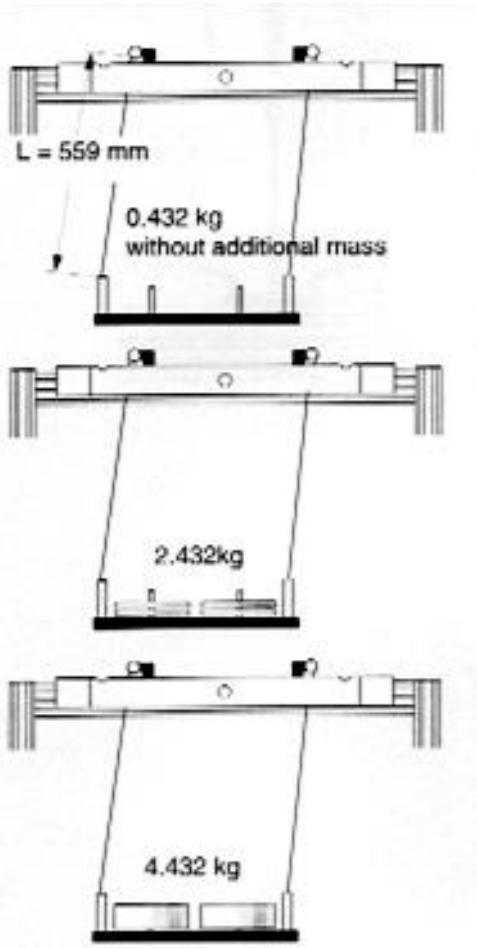
روش انجام آزمایش

۱۱- آزمایش یازدهم: مقایسه آونگ دو نخه و آونگ ساده

از آزمایش‌های قبل برای زمان تناوب $1.5\ s$ طول آونگ ساده را به دست آورده‌ایم حال همین طول نخ را برای آونگ دونخه در نظر می‌گیریم. برای 20 نوسان زمان لازم را برای آونگ دونخه بدون جرم اضافی بدست می‌آوریم. زمان تناوب را با آنچه قبلاَ به دست آورده ایم مقایسه نمائید. در مورد دلیل اختلاف بحث کنید.



روش انجام آزمایش



۱۲- آزمایش دوازدهم: بررسی اثر جرم در آونگ دو نخه

جدول پیوست را با اضافه نمودن وزنه هایی به آونگ دونخه تکمیل نمائید. طول نخها همان ۵۵۹ میلیمتر است. دلایل اختلاف را بحث کنید. اثر تغییر طول آونگ را نیز بررسی کنید.

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

آزمایش دوازدهم:

زمان تناوب	زمان ۲۰ نوسان	جرم
		0.310 Kg(بدون جرم اضافی)

امام علی علیه السلام:

بهترین نیکی آن است که سریع انجام گیرد و منتی به دنبالش نباشد.